Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 17 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(1+2 Punkte)*

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, deren zugehörige Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiere.

Zeige die Konvergenz

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ mit

$$|a_n - a_{n-1}| \leq 2^{-n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{K}$ konvergiert.

Lösung. Wir erinnern uns, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, also $\mathbb{K}$ vollständig ist.

(a) Wir definieren die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \,,$$

die laut Voraussetzung wohldefiniert ist, denn gilt das Cauchy-Kriterium für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so auch für $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, wo $k \in \mathbb{N}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Aus dem Cauchy-Kriterium für $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ folgt, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt und ein $M \in \mathbb{N}$ mit $M > N$, sodass:

$$\left|\sum_{n=k}^{M} a_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k > N.$$

Die Zahl $M \in \mathbb{N}$ war dabei beliebig groß und deshalb muss

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} a_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k > N$$

gelten (vgl. A2 von AdT11). Wir müssen nun die Konvergenz von $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zeigen. Betrachte dazu ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq N$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$|b_m| = \left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n\right| \leq \underbrace{\left|\sum_{n=m}^{M} a_n\right|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\left|\sum_{n=M}^{\infty} a_n\right|}_{\leq\varepsilon/2} < \varepsilon$$

(der Term $\left|\sum_{n=m}^{M} a_n\right|$ verschwindet sogar, wenn wir uns auf genügend große $m \in \mathbb{N}$ beschränken). Also ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt dann ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

Mit Hilfe einer Teleskopsumme können wir schreiben,

$$a_{n+k} - a_n = \sum_{j=n}^{n+k-1} (a_{j+1} - a_j).$$

Wegen der Dreiecksungleichung schließen wir daraus, dass

$$|a_{n+k} - a_n| \leq \sum_{j=n}^{n+k-1} |a_{j+1} - a_j| = \sum_{j=0}^{k-1} |a_{n+j+1} - a_{n+j}|$$

gilt. Die Annahme liefert dann weiter, dass für $n > N$ gilt:

$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-n-j} = 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-j} \\ &\leq 2^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = \frac{2^{-n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Hier haben wir in der zweiten Zeile die Konvergenz der geometrischen Reihe genutzt. Das zeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Die Konvergenz folgt dann aus der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$.

■

Aufgabe 2: *(1+1+4 Punkte)* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so dass

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq 1 - \frac{\alpha}{n} \qquad \text{für alle } n > N$$

für ein $\alpha > 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Folge $(na_n)_{n>N}$ ist monoton fallend.

(b) Die Folge $(na_n)_{n>N}$ konvergiert.

(c) Die zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugehörige Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Hinweis: Aufgabenteil (b) und Cauchy-Konvergenzkriterium.

Lösung.

(a) Setze $b_n := na_n$ für $n > N$ und betrachte die Folge $(b_n)_{n>N}$. Sie ist monoton fallend, weil nach Voraussetzung für $n > N$

$$na_n \leq na_{n-1} - \alpha a_{n-1} = (n-1)a_{n-1} - (\alpha - 1)a_{n-1}$$

gilt. Für $n > N$ ist daher

$$b_n - b_{n-1} \leq -(\alpha - 1)a_{n-1} \leq 0,$$

d.h. $(b_n)_{n>N}$ ist monoton fallend.

(b) Da $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $b_{N+1} \geq b_n > 0$ für $n > N$, d.h. $(b_n)_{n>N}$ ist beschränkt. Nach Aufgabenteil (a) ist die Folge $(b_n)_{n>N}$ außerdem monoton fallend und deshalb konvergent. Wir schreiben

$$b := \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(c) Wir wissen aus Teil (a), dass für $n > N$

$$a_n \leq \frac{1}{\alpha - 1}(b_n - b_{n+1}).$$

Daraus folgt für $M, m \in \mathbb{N}$ mit $M, m > N$, dass

$$\sum_{n=m}^{M} a_n \leq \frac{1}{\alpha - 1} \sum_{n=m}^{M} (b_n - b_{n+1}) \leq \frac{b_m - b}{\alpha - 1},$$

wo die zweite Ungleichung wegen der Teleskopsumme gilt und, weil $b < b_m$ für $m > N$. Ist nun $\varepsilon > 0$, so finden wir ein $m \in \mathbb{N}$, $m > N$, mit $|b_m - b| < (\alpha - 1)\varepsilon$ und damit gilt für m, M groß genug die Cauchy-Konvergenzbedingung

$$\left| \sum_{n=m}^{M} a_n \right| < \varepsilon.$$

■

Aufgabe 3: *(1 Punkt)* Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1}$$

divergiert.

Lösung. Es gilt für $n \geq 3$, dass

$$\frac{n+4}{n^2-3n+1} \geq \frac{n+4}{n^2-2n+1} \geq \frac{n-1}{n^2-2n+1} = \frac{n-1}{(n-1)^2} = \frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{n}.$$

Damit gilt für $k, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq k \geq 3$,

$$\sum_{n=k+1}^{m} \frac{n+4}{n^2-3n+1} \geq \sum_{n=k+1}^{m} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=k+1}^{m} \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{n=k+1}^{m} 1 = \frac{m-k}{m} \longrightarrow 1$$

für $m \longrightarrow \infty$. Somit ist das Cauchysche Konvergenzkriterium für $\varepsilon < 1$ verletzt und die angegebene Reihe muss also divergent sein. ■